

2019年天津河北区高三二模理科数学试卷

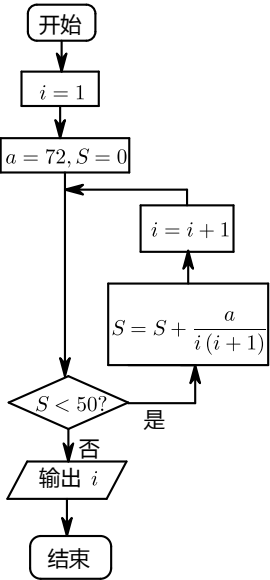
一、选择题（本大题共8题，每小题5分，共计40分）

1. 设集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{x | x = 2n, n \in A\}$, 则 $A \cap B = ()$.
- A. $\{0, 2, 4\}$ B. $\{2, 4, 6\}$
C. $\{0, 2, 4, 6\}$ D. $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
2. 若复数 $\frac{1+i}{1+ai}$ 为纯虚数 (i 为虚数单位), 则实数 a 的值为 $()$.
- A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. 1
3. 命题 $p: " \forall x \in (-\infty, 0), 3^x \geq 4^x "$ 的否定 $\neg p$ 为 $()$.
- A. $\forall x \in (-\infty, 0), 3^x < 4^x$ B. $\forall x \in (-\infty, 0), 3^x \leq 4^x$
C. $\exists x_0 \in (-\infty, 0), 3^{x_0} < 4^{x_0}$ D. $\exists x_0 \in (-\infty, 0), 3^{x_0} \leq 4^{x_0}$
4. 已知 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, $b = \log_2 3$, $c = \log_4 7$, 则 a, b, c 的大小关系为 $()$.
- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$
5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以 $F_1 F_2$ 为直径的圆与双曲线的渐近线的一个交点为 $(3, 4)$, 则双曲线的方程为 $()$.
- A. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ C. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$
6. 已知四面体 $ABCD$ 的四个面都为直角三角形, 且 $AB \perp$ 平面 BCD , $AB = BD = CD = 2$, 若该四面体的四个顶点都在球 O 的表面上, 则球 O 的表面积为 $()$.
- A. 3π B. $2\sqrt{3}\pi$ C. $4\sqrt{3}\pi$ D. 12π
7. 已知函数 $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \mathbf{R}$, 给出下列四个命题: ①函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π ; ②函数 $f(x)$ 的最大值为 1 ;
③函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增; ④将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到的函数解析式为 $g(x) = \sin 2x$. 其中正确命题的个数是 $()$.
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-a|}, & x < a+1 \\ -|x+1| - a, & x \geq a+1 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 的最大值不超过 1 , 则实数 a 的取值范围为 $()$.
- A. $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ C. $\left[-\frac{5}{4}, 0\right)$ D. $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$

二、填空题（本大题共6题，每小题5分，共计30分）

9. 交通管理部门为了解机动车驾驶员（简称驾驶员）对某新法规的知晓情况，对甲、乙、丙、丁四个社区做分层抽样调查．假设四个社区驾驶员的总人数为 N ，其中甲社区有驾驶员 96 人．若在甲、乙、丙、丁四个社区抽取驾驶员的人数分别为 12, 21, 25, 43，则这四个社区驾驶员的总人数 $N =$ _____.

10. 阅读如图的程序框图，运行相应的程序，则输出*i*的值为 _____ .

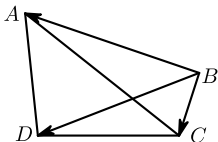


11. 若实数*x*，*y*满足条件 $\begin{cases} y \leq x \\ x + 2y \geq 3 \\ 2x + y \geq 6 \end{cases}$ ，则 $z = 2x + 2y$ 的最小值为 _____ .

12. 在平面直角坐标系中，直线*l*的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$ (*t*为参数)，以坐标原点为极点，*x*轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，圆*C*的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho \sin \theta = 3$ ，若直线与圆交于*M*，*N*两点，则线段*MN*的长度为 _____ .

13. 已知首项与公比相等的等比数列{*a_n*}中，若*m*，*n* ∈ *N*^{*}，满足 $a_m a_n^2 = a_4^2$ ，则 $\frac{2}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 _____ .

14. 如图，在平面四边形*ABCD*中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle DCA = 2\angle BAC$ ，若 $\overrightarrow{BD} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}(x, y \in \mathbf{R})$ ，则*x* - *y*的值为 _____ .



三、解答题（本大题共6题，共计80分）

15. 已知△*ABC*的内角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，满足 $\frac{b}{a+c} = 1 - \frac{\sin C}{\sin A + \sin B}$.
（ 1 ）求角*A*的值 .

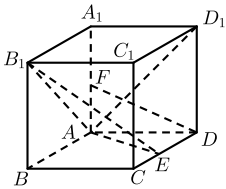
（ 2 ）若*a* = 3，*b* = 2√2，求sin(2*B* + *A*)的值 .

16. 某校为了普及环保知识，增强学生的环保意识，在全校组织了一次有关环保知识的竞赛 . 经过初赛、复赛，甲、乙两个代表队（每队3人）进入了决赛，规定每人回答一个问题，答对为本队赢得10分，答错得0分 . 假设甲队中每人答对的概率均为 $\frac{3}{4}$ ，乙队中3人答对的概率分别为 $\frac{3}{4}$ ， $\frac{4}{5}$ ， $\frac{2}{3}$ ，且各人回答正确与否相互之间没有影响，用*X*表示乙队的总得分 .

（ 1 ）求*X*的分布列及数学期望 .

（ 2 ）求甲、乙两队总得分之和等于30分且甲队获胜的概率 .

17. 如图，四棱柱*ABCD* - *A₁B₁C₁D₁*的底面为菱形，*AA₁* ⊥底面*ABCD*， $\angle BAD = 120^\circ$ ，*AB* = 2，*E*，*F*分别为*CD*，*AA₁*的中点 .



- (1) 求证： $DF \parallel$ 平面 B_1AE .
- (2) 若直线 AD_1 与平面 B_1AE 所成角的正弦值为 $\frac{3}{4}$ ，求 AA_1 的长 .
- (3) 在 (2) 的条件下，求二面角 $B_1 - AE - D_1$ 的正弦值 .

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $(n + 2)a_n = (n + 1)a_{n+1} - 2(n^2 + 3n + 2)$, 设 $b_n = \frac{a_n}{n + 1}$.

- (1) 求 b_1 , b_2 , b_3 的值 .
- (2) 证明数列 $\{b_n\}$ 是等差数列 .
- (3) 设 $\frac{c_n}{b_n} = 2^n + 1$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $T_n(n \in \mathbf{N}^*)$.

19. 已知椭圆 $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 过点 $P(2, 1)$, 且短轴长为 $2\sqrt{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程 .
- (2) 过点 P 作 x 轴的垂线 l , 设点 A 为第四象限内一点且在椭圆 C 上 (点 A 不在直线 l 上) , 点 A 关于 l 的对称点为 A' , 直线 $A'P$ 与椭圆 C 交于另一点 B . 设 O 为坐标原点 , 判断直线 AB 与直线 OP 的位置关系 , 并说明理由 .

20. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3ax + e$, $g(x) = 1 - \ln x$, 其中 e 为自然对数的底数 .

- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $l : x + 2y = 0$ 垂直 , 求实数 a 的值 .
- (2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .
- (3) 用 $\max\{m, n\}$ 表示 m , n 中的较大者 , 记函数 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}(x > 0)$, 若函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内恰有2个零点 , 求实数 a 的取值范围 .